

# Влияние квантовых степенных хвостов на скорости реакций синтеза в равновесной плазме астрофизических объектов и в лабораторных условиях

А.Н.Старостин,  
М.Г.Гладуш,  
Ю.В.Петрушевич

# Функция распределения частиц по импульсам с учетом квантовой поправки

$$f(E, \mathbf{p}) = n(E) \frac{\gamma(E, \mathbf{p})}{\pi \left[ \left( E - \varepsilon_p - \Delta(E, \mathbf{p}) \right)^2 + \gamma^2(E, \mathbf{p}) \right]} \equiv n(E) \delta_\gamma(E - \varepsilon_p)$$

- ◆  $n(E)$  – числа заполнения,
- ◆  $\varepsilon_p = p^2/2m$  – кинетическая энергия,
- ◆  $\gamma \sim \hbar\nu$  – столкновительная ширина,
- ◆  $\nu$  – частота соударений,
- ◆  $\Delta$  – плотностной сдвиг энергии

# Функция распределения частиц по импульсам с учетом квантовой поправки

- ◆ В частности, для электронов в условиях термодинамического равновесия

$$n(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} + 1},$$

# Функция распределения частиц по импульсам с учетом квантовой поправки

- ◆ Функция распределения частиц по импульсам получается в результате интегрирования по энергиям:

$$f(\mathbf{p}) = \int dE f(E, \mathbf{p})$$

# Функция распределения частиц по импульсам в газе низкой плотности

- ◆ В этом случае столкновительная ширина  $\gamma$  спектральной функции  $\delta_\gamma(E - \varepsilon_p)$  пренебрежимо мала, что сводит ее к  $\delta$ -функции. Это дает:

$$f(\mathbf{p}) = e^{\frac{\mu}{T}} e^{-\frac{\varepsilon_p}{T}}$$

- ◆ - максвелловскую функцию распределения частиц по импульсам

# Функция распределения частиц в случае газа конечной плотности

- ◆ содержит в области больших импульсов  $\varepsilon_p \gg \{T, \gamma, \Delta\}$ , наряду с резонансной, максвелловской зависимостью, также степенную поправку

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi \varepsilon_p^2} \int_{-\infty}^{\infty} n(E) \gamma(E, \mathbf{p}) dE$$

# Модель Лоренцева газа

- ◆ Уравнение для ширины спектральной функции частицы

$$\gamma(E, \mathbf{p}) = \frac{\pi N}{\hbar^3} \int |U(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)|^2 \delta_\gamma(E - \varepsilon_{\mathbf{p}_1}) \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}$$

# Модель Лоренцева газа

- ◆ Решение уравнения для ширины

$$\gamma(E, p) = \frac{\hbar N}{2} \sigma_t(p, p_1(E)) \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

где

$$\sigma_t = \int d\Omega \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left| \int dV U(r) e^{-iqr} \right|^2$$



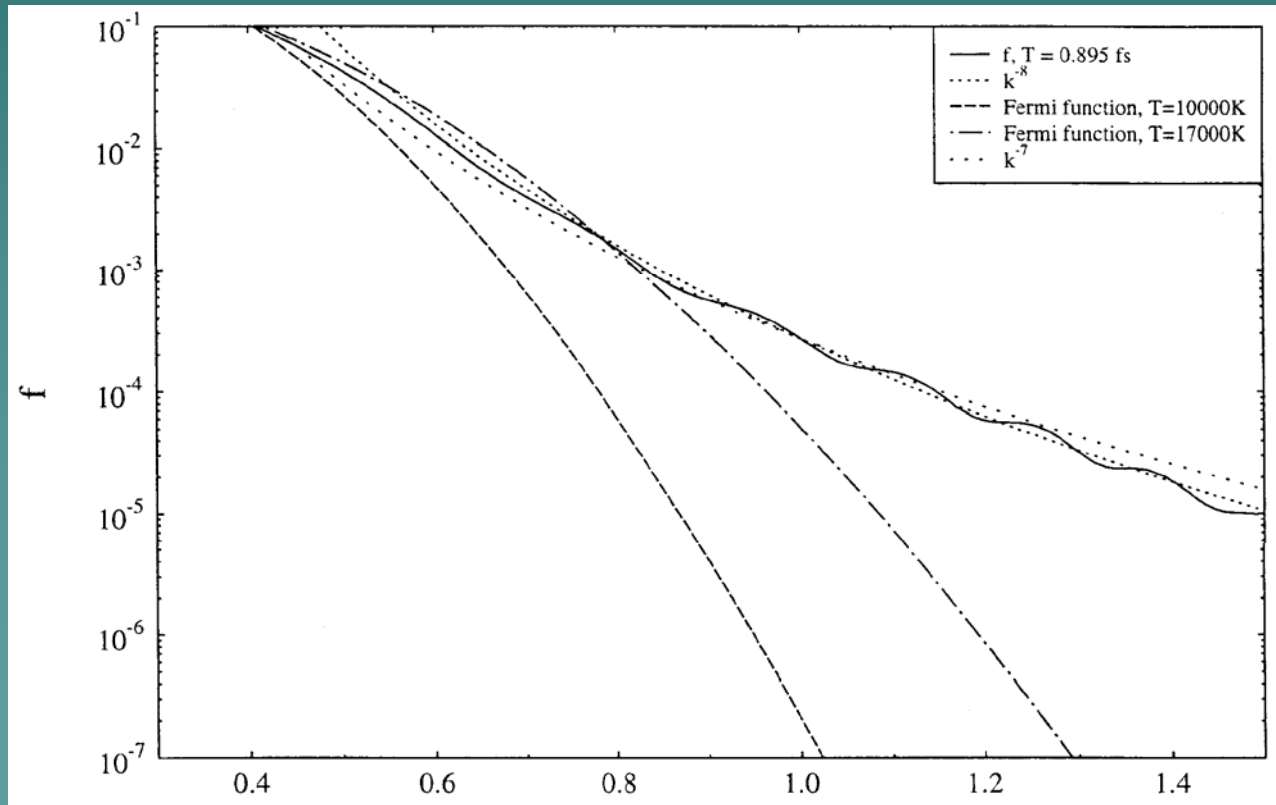
# Асимптотическое выражение для $f(p)$ в рамках модели лоренцева газа

$$f(p) = e^{\frac{\mu}{T}} \left( e^{-\frac{\varepsilon_p}{T}} + \frac{\hbar N T \sigma_t(p)}{2\pi \varepsilon_p^2} \sqrt{\frac{\pi T}{2m}} \right)$$

- ◆ В частности, для электронного газа, для которого  $\sigma_t \sim (\varepsilon_p)^{-2}$ , указанная поправка зависит от импульса по закону  $\sim p^{-8}$

# High density plasma

In Rostock university (GDR, M.Bonitz, D.Semkat ) were developed numerical codes for computing distribution function, using Kadanoff-Baym equations



# Реакция термоядерного синтеза



- ◆ В этом случае реакция определяется подбарьерным туннелированием, и зависимость сечения от скорости дается выражением

$$\sigma_1(\varepsilon_p) = \frac{S(\varepsilon_p)}{\varepsilon_p} \exp\{-2\pi\eta(\varepsilon_p)\}$$

# Реакция термоядерного синтеза

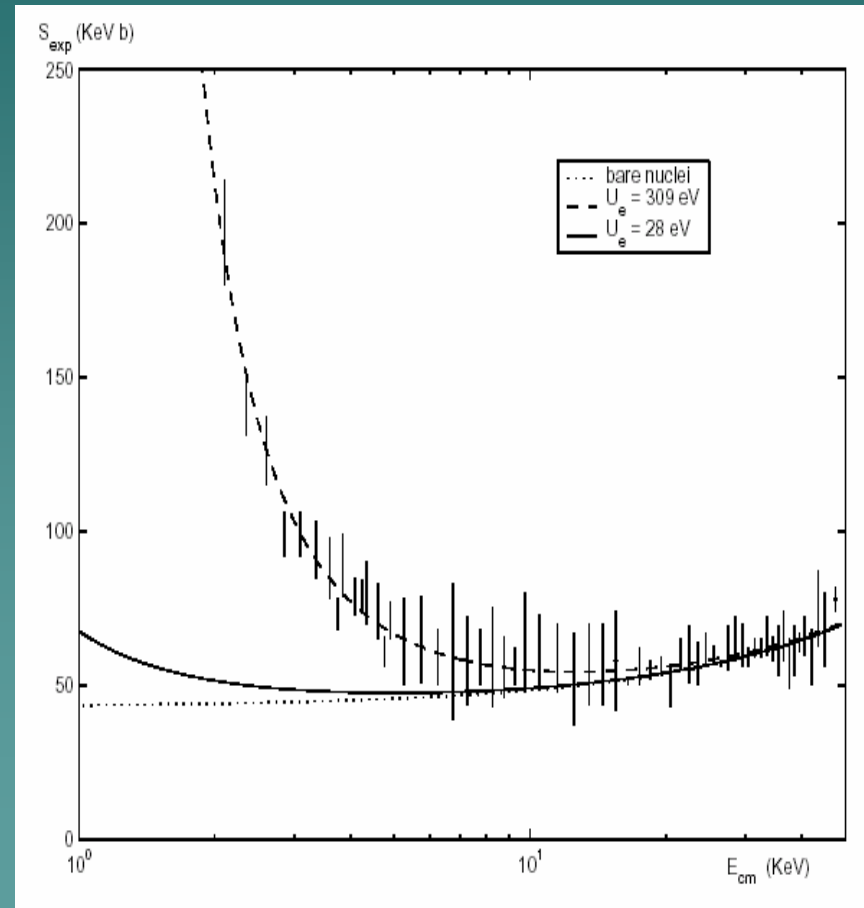
◆ Здесь

$$\eta(\varepsilon_p) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \quad - \text{ фактор Зоммерфельда}$$

- ◆  $S(\varepsilon_p)$  - астрофизический фактор.
- ◆ Расчет поправки сводится к усреднению сечения с функцией распределения частиц

# Энергетическая зависимость астрофизического фактора dd-реакции

- ◆ Теоретические зависимости зависимости получены с учетом квантовой поправки и эффекта экранирования ядер дейтерия свободными электронами металла мишени.



# Моделирование Монте-Карло

Было проведено вычисление скорости реакции синтеза методом Монте-Карло.

$$\begin{aligned}
 N_a N_b \langle \sigma v \rangle &= \frac{1}{4\pi\mu_{ab}^2} \int_0^\infty \frac{dE_a}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_a \int_0^\infty \frac{dE_b}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_b \int_{-\infty}^\infty d\omega \int d\mathbf{q} n(E_a) \cdot n(E_b) \times \\
 &\times \delta\gamma_a(E_a - \varepsilon_a) (1 - n(E_a + Q_a - \omega)) \delta\gamma'_a(E_a + Q_a - \omega - \varepsilon_{p_a - q}) \times \\
 &\times \delta\gamma_b(E_b - \varepsilon_b) (1 - n(E_b + \omega + Q_b)) \delta\gamma'_b(E_b + \omega + Q_b - \varepsilon_{p_b + q}) \cdot |f|^2
 \end{aligned}$$

$$\gamma_a(E_a, \varepsilon_a) = \frac{\hbar}{2} \sum_c N_c \sqrt{\frac{2E_a}{\mu_{ac}}} \left\langle \frac{4\pi e^4 Z_a^2 Z_c^2}{(\varepsilon_{ac} + E_a + E_{De})^2 - 4E_a \varepsilon_{ac}} \right\rangle_c$$

$$\varepsilon_a = \frac{p_a^2}{2m_a}$$

$$E_{De} = \frac{\hbar^2}{2m_e R_{De}^2}$$

$E_b, \text{ keV}$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K$	$K/K_1$
15	4.381E+04	4.045E+04	7.393E+04	4.38E+04	1.00E+00
10	4.073E+03	3.762E+03	6.877E+03	4.11E+03	1.01E+00
5	1.711E+01	1.580E+01	2.892E+01	1.77E+01	1.03E+00
2	2.615E-04	2.421E-04	4.487E-04	2.85E-04	1.09E+00
1.8	5.038E-05	7.223E-05	1.344E-04	5.62E-05	1.12E+00
1.5	2.339E-06	3.850E-06	7.343E-06	3.34E-06	1.43E+00
1.2	3.613E-08	7.474E-08	2.265E-07	7.84E-07	2.17E+01
1	8.252E-10	7.711E-10	5.678E-08	2.82E-07	3.42E+02

# Невырожденная плазма

В случае  $n(E) \ll 1$

$$\begin{aligned} N_a N_b \langle \sigma \nu \rangle &= \frac{1}{4\pi\mu_{ab}^2} \int_0^\infty \frac{dE_a}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_a \int_0^\infty \frac{dE_b}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_b \int_{-\infty}^\infty d\omega \int d\mathbf{q} n(E_a) \cdot n(E_b) \times \\ &\times \delta\gamma_a(E_a - \varepsilon_a) \delta\gamma'_a(E_a + Q_a - \omega - \varepsilon_{p_a - q}) \times \\ &\times \delta\gamma_b(E_b - \varepsilon_b) \delta\gamma'_b(E_b + \omega + Q_b - \varepsilon_{p_b + q}) \cdot \frac{|\vec{p}|}{|\vec{p} - \vec{q}|} \sigma(\varepsilon_p) \end{aligned}$$

Использовалось соотношение:

$$\vec{p} = \frac{m_b \vec{p}_a - m_a \vec{p}_b}{m_a + m_b}$$

$$\varepsilon_p = \frac{p^2}{2\mu_{ab}}$$

$$|f|^2 = \frac{|\vec{p}|}{|\vec{p} - \vec{q}|} \sigma(\varepsilon_p)$$



# Невырожденная плазма

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{q} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta\gamma'_a \left( E_a + Q_a - \omega - \varepsilon_{p_a - q} \right) \delta\gamma'_b \left( E_b + \omega + Q_b - \varepsilon_{p_b + q} \right) \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|} = \\ & = \int d\mathbf{q} \delta\gamma'_a \left( E_a + Q_a + E_b + Q_b - \varepsilon_{p_a - q} - \varepsilon_{p_b + q} \right) \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|} = \\ & = \int d\mathbf{q} \delta\gamma'_a \left( E_a + Q_a + E_b + Q_b - \varepsilon_{p_a} - \varepsilon_{p_b} + \varepsilon_p - \frac{|\vec{p} - \vec{q}|^2}{2\mu_{ab}} \right) \frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|} = 4\pi\mu_{ab} \end{aligned}$$

# Невырожденная плазма

$$\begin{aligned} N_a N_b \langle \sigma v \rangle &= \\ &= \int_0^\infty \frac{dE_a n(E_a)}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_a \delta\gamma_a(E_a - \varepsilon_a) \int_0^\infty \frac{dE_b n(E_b)}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_b \delta\gamma_b(E_b - \varepsilon_b) V_{ab} \sigma(\varepsilon_p) \end{aligned}$$

# Аналитические оценки

С учетом «квантовых хвостов» функция распределения может быть представлена в виде:

$$f(\varepsilon) = f_0(\varepsilon) + f_1(\varepsilon) = \frac{1}{T} \left( e^{-\frac{\varepsilon}{T}} + \frac{\hbar N T \sigma_t(\varepsilon_p)}{2\pi\varepsilon_p^2} \sqrt{\frac{\pi T}{2m}} \right)$$

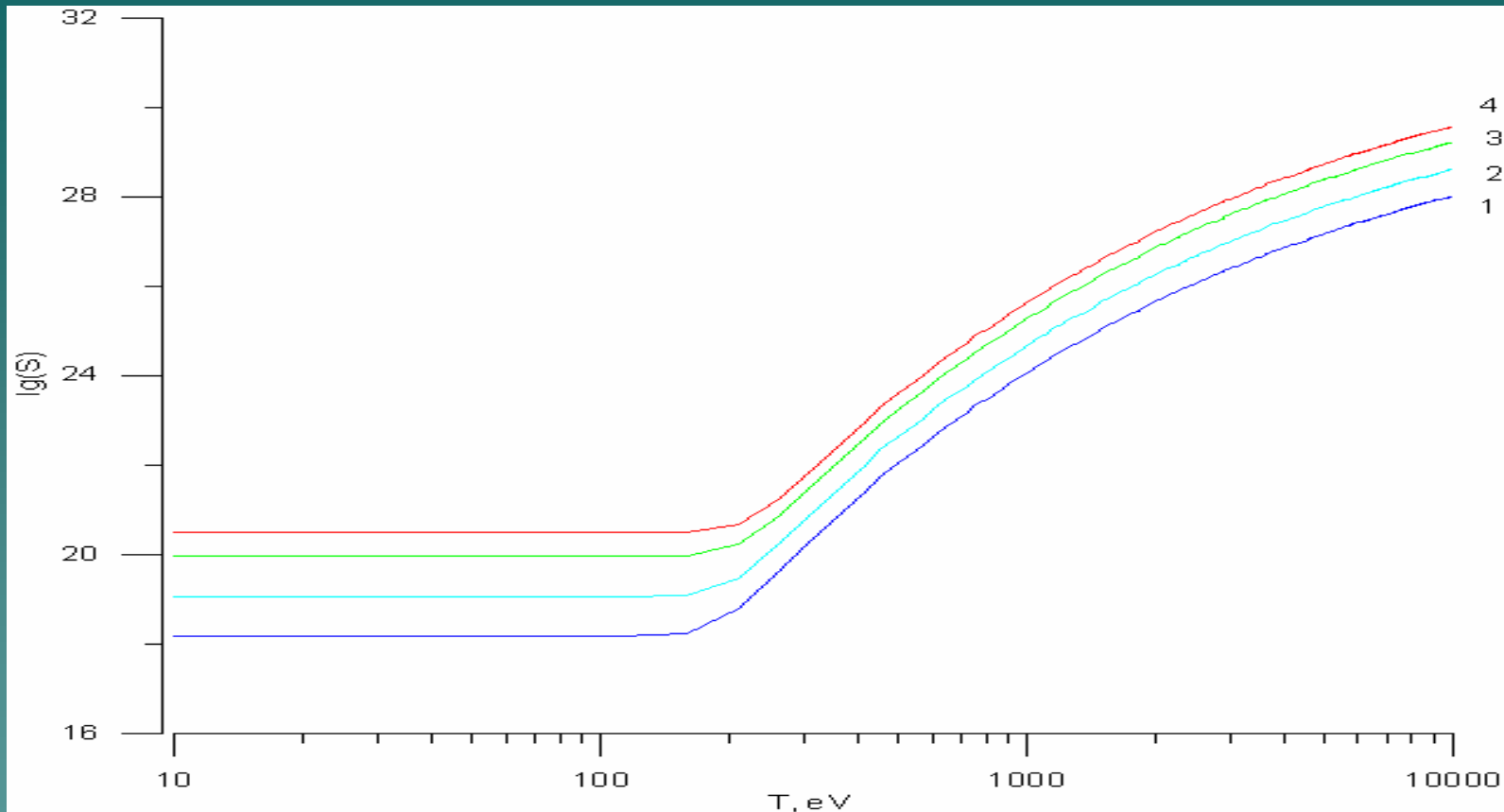
$$N_a N_b \langle \sigma v \rangle = N_a N_b \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ f_0(\varepsilon_a) f_0(\varepsilon_b) \cdot \int_{-1}^1 dx V_{ab} \sigma(\varepsilon_p) \right] d\varepsilon_a d\varepsilon_b +$$
$$+ 2 \cdot N_a N_b \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ f_0(\varepsilon_a) f_1(\varepsilon_b) \cdot \int_{-1}^1 dx V_{ab} \sigma(\varepsilon_p) \right] d\varepsilon_a d\varepsilon_b + N_a N_b \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ f_1(\varepsilon_a) f_1(\varepsilon_b) \cdot \int_{-1}^1 dx V_{ab} \sigma(\varepsilon_p) \right] d\varepsilon_a d\varepsilon_b$$

# Оценка поправки к константе скорости термоядерной реакции

$$k_t^{ab} = 7,88 \cdot 10^{-24} \frac{S_{ab} [\text{кэВ} \cdot \text{барн}] \rho [\text{г} \cdot \text{см}^{-3}]}{E_G^3 [\text{кэВ}] \sqrt{A_{ab}}} \Sigma_{ab}$$

$$\Sigma_{ab} = \sum_l \frac{\chi_l}{A_l} z_l^2 \left[ \left( \frac{A_a}{A_a + A_b} \right)^{5/2} \left( \frac{A_b + A_l}{A_l} \right)^2 \frac{z_b^2}{\sqrt{A_{bl}}} + \right. \\ \left. + \left( \frac{A_b}{A_a + A_b} \right)^{5/2} \left( \frac{A_a + A_l}{A_l} \right)^2 \frac{z_a^2}{\sqrt{A_{al}}} \right]$$

# Сжатие ударом



Зависимость логарифма расчетной скорости реакции синтеза D-D:  $S=(K_{cl}+K_t)*N^2$  с учетом как классического выражения, так и квантового эффекта (в  $1/(\text{см}^3\cdot\text{с})$ ) от температуры среды при различных концентрациях дейтронов: 1- $5\cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , 2- $1\cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$ , 3- $2\cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$ , 4-  $3\cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$ .

# Сравнение различных моделей

Для модельного сечения реакции в области параметров  $N$ ,  $T$ , где важны квантовые эффекты :

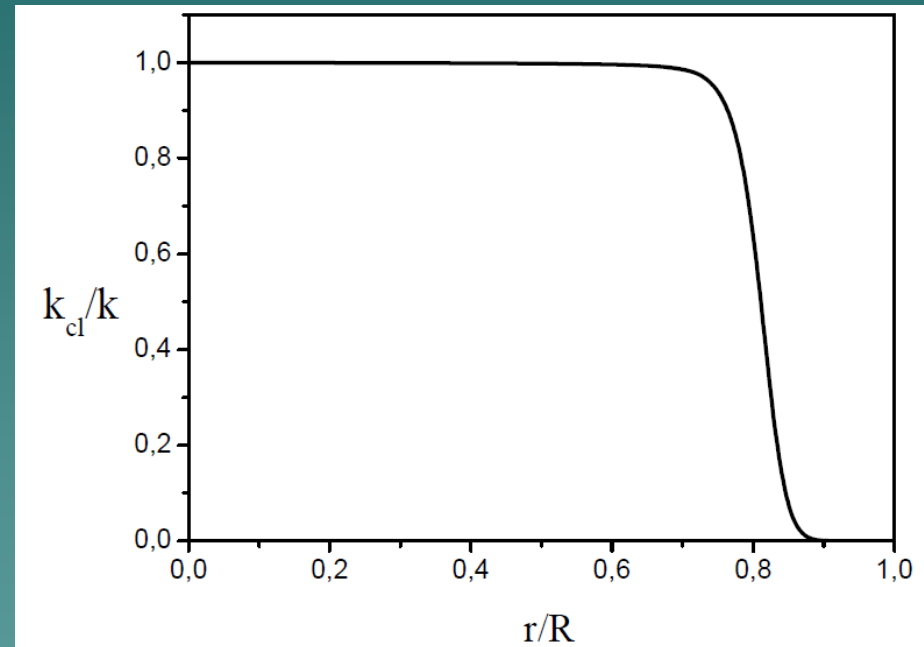
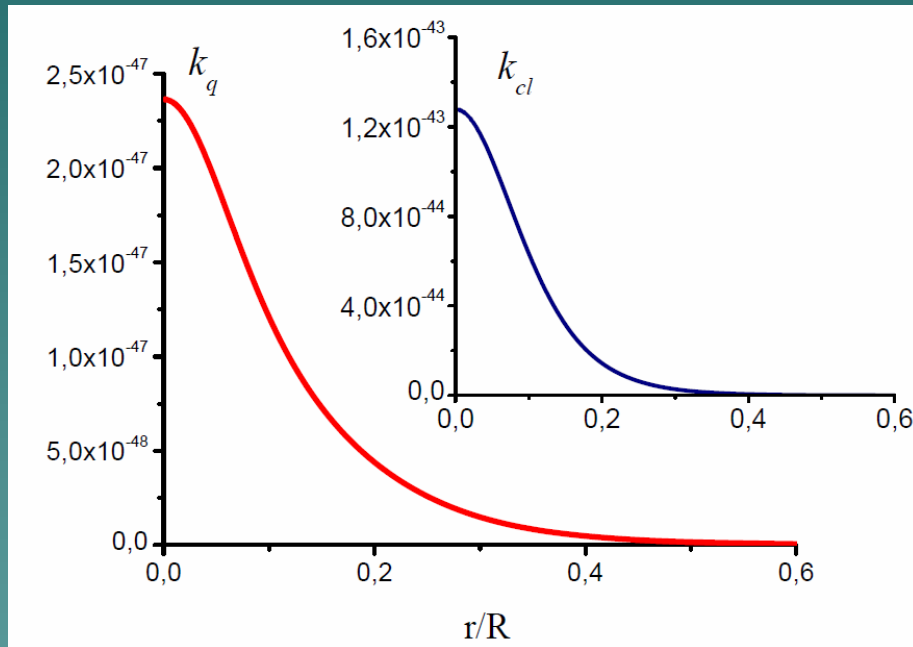
	$N=10^{21} \text{ 1/см}^3$ $T = 2 \text{ эВ}$	$N=10^{22} \text{ 1/см}^3$ $T = 2 \text{ эВ}$	$N=10^{23} \text{ 1/см}^3$ $T = 2 \text{ эВ}$
Аналитика	$1.5 \cdot 10^{20}$	$1.5 \cdot 10^{23}$	$1.5 \cdot 10^{26}$
Rate 3	$1.43 \cdot 10^{20}$	$1.43 \cdot 10^{23}$	$1.43 \cdot 10^{26}$
Rate 5	$1.3 \cdot 10^{20}$	$2.0 \cdot 10^{23}$	$3.2 \cdot 10^{26}$
Rate 10	$0.99 \cdot 10^{20}$	$2.1 \cdot 10^{23}$	$2.7 \cdot 10^{26}$

# Расчеты по солнечной траектории

Для трех точек различных областей Солнца проведены расчеты скорости реакции синтеза:  $p + p \rightarrow D + e^+ + \nu$

	$N=3.3179 \cdot 10^{25} \text{ 1/см}^3$ $T=1.3362 \text{ кэВ}$	$N=9.5754 \cdot 10^{24} \text{ 1/см}^3$ $T=0.6892 \text{ кэВ}$	$N=7.405 \cdot 10^{22} \text{ 1/см}^3$ $T=0.1828 \text{ кэВ}$
Классическая скорость	$3.28 \cdot 10^6$	5622	$4.32 \cdot 10^{-6}$
Квантовая поправка	305.77	7.35	$3.4 \cdot 10^{-6}$
Полная скорость (аналитика)	$3.28 \cdot 10^6$	5629	$7.72 \cdot 10^{-6}$
Rate 3	$3.6 \cdot 10^6$	6834	$7.02 \cdot 10^{-6}$
Rate 5	$3.53 \cdot 10^6$	6216	$7.86 \cdot 10^{-6}$
Rate 10	$3.69 \cdot 10^6$	5945	$8.82 \cdot 10^{-6}$

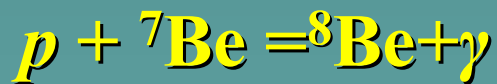
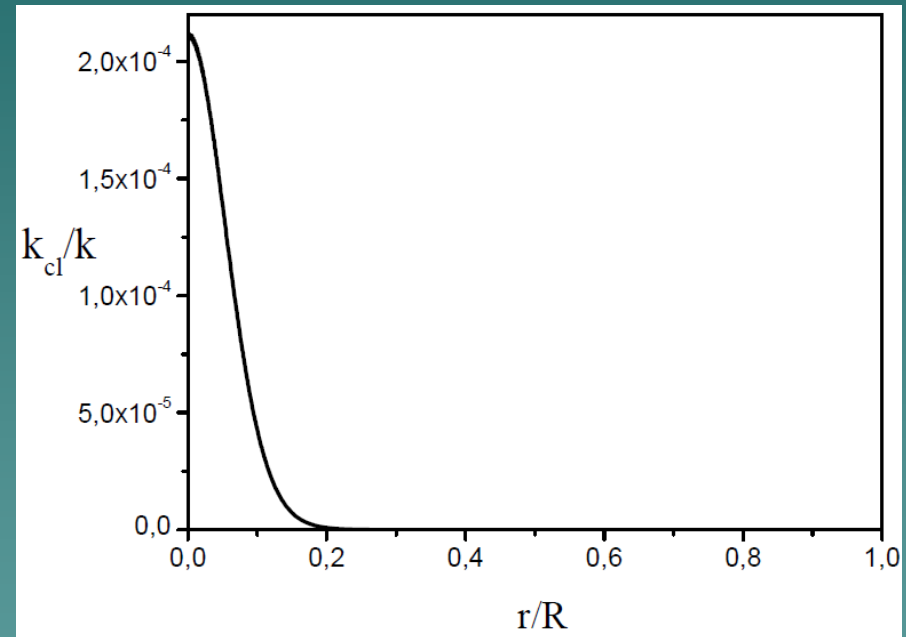
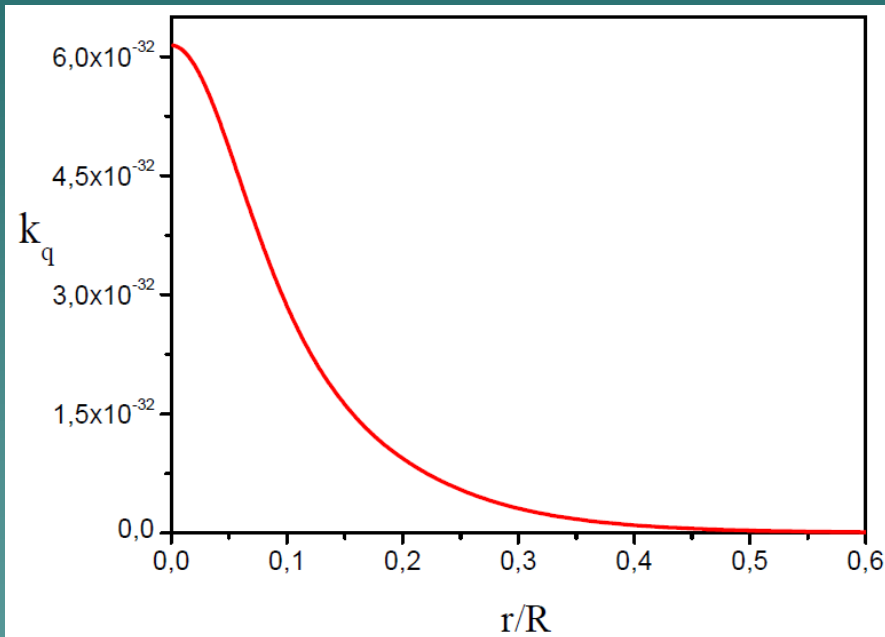
# Изменение константы скорости реакции вдоль солнечного радиуса



$$E_G = 49,97 \text{ кэВ}, S_{pp} = 3,78 \times 10^{-22} \text{ кэВ барн}$$



# Изменение константы скорости реакции вдоль солнечного радиуса



$$E_G = 1,4 \times 10^3 \text{ кэВ}, S_{17} = 0,029 \text{ кэВ барн}$$